2.2.1 Ejercicios resueltos

Problema núm. 1

Determina las asíntotas horizontales para cada una de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4}}$ b) $\boldsymbol{g(x) = \dfrac{x^2 - 2}{(2x+3)^3}}$ c) $\boldsymbol{h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}}$

d) $\boldsymbol{i(x) = \dfrac{4x^3 + 2}{x^3 + 2x^2 + x + 1}}$ e) $\boldsymbol{j(x) = e^{-x-3}}$ f) $\boldsymbol{k(x) = e^{\frac{1}{x}}}$

Estudia la posición de cada curva respecto de su asíntota horizontal.

Solución:

a) f es una función racional (cociente de dos polinomios) y como el polinomio del numerador tiene igual grado que el polinomio del denominador, tiene una asíntota horizontal, que es la misma tanto para x tendiendo hacia menos infinito, como para x tendiendo hacia más infinito.

Dividiendo ambos polinomios se obtiene 1 de cociente y $-3x+7$ de resto, luego la recta $y = 1$ es la asíntota horizontal.

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 3x + 3 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2} -x^2 + 4 & 1 \\ \cline{1-1} -3x + 7 & \end{array}$$

Para estudiar la posición de la curva respecto de su asíntota, estudiamos los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x+7}{x^2-4} = 0^+ \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x+7}{x^2-4} = 0^-$$

de donde deducimos que para x tendiendo hacia menos infinito, la curva está por encima de la asíntota y para x tendiendo hacia más infinito, la curva está por debajo de la asíntota.

b) La función g es una función racional (cociente de dos polinomios) y como el polinomio del numerador es de menor grado que el polinomio del denominador, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal tanto para x tendiendo hacia menos infinito, como para x tendiendo hacia más infinito. Para estudiar la posición de la curva respecto de su asíntota, estudiamos los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-2}{(2x+3)^3} = 0^- \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2}{(2x+3)^3} = 0^+$$

de donde deducimos que para x tendiendo hacia menos infinito, la curva está por debajo de la asíntota y para x tendiendo hacia más infinito, la curva está por encima de la asíntota.

c) Para la función h hemos de estudiar los límites siguientes:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$$