Solución:

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$, operamos de la siguiente manera:

$$2x^2 - 3x = y - 1;\ x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(y-1)$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}(y-1) + \frac{9}{16} = \frac{1}{2}\left(y - 1 + \frac{9}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{8}\right)$$

se trata pues de una parábola del tipo $(x-h)^2 = 2p(y-k)$, tiene su vértice en el punto $V(3/4, -1/8)$, su eje es paralelo al de ordenadas y está abierta hacia arriba, el parámetro es $p = 1/4$, las coordenadas del foco son $F(3/4, 0)$ y la ecuación de la directriz es $y = -1/4$.

b) $x = 3y^2 + y - 2$, operamos de la siguiente manera:

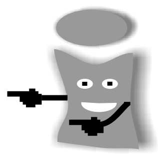
$$3y^2 + y = x + 2;\ y^2 + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(x+2)$$

$$\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{36} = \frac{1}{3}\left(x + 2 + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{25}{12}\right)$$

se trata pues de una parábola del tipo $(y-k)^2 = 2p(x-h)$, tiene su vértice en el punto $V(-25/12, -1/6)$, su eje es paralelo al de abscisas y está abierta hacia la derecha, el parámetro es $p = 1/6$, las coordenadas del foco son $F(-2, -1/6)$ y la ecuación de la directriz es $x = -13/6$.

Problema núm. 35

Hallar en función de los coeficientes a, b y c, el valor del parámetro p y las coordenadas del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$.



Solución:

Pongamos la ecuación de la parábola en una de las formas conocidas, para ello operamos de la siguiente manera:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx = y - c \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}\,x = \frac{1}{a}\,(y-c)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}(y-c) + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{1}{a}\left(y - c + \frac{b^2}{4a}\right) = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

comparando la ecuación obtenida con la de una parábola de vértice $V(h,k)$ y eje paralelo al de ordenadas,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2-4ac}{4a}\right) \qquad ; \qquad (x-h)^2 = \pm 2p\,(y-k)$$

deducimos que $2p = \pm 1/a \Rightarrow p = \pm 1/2a$, si el coeficiente a es positivo, la parábola está abierta hacia arriba y si es negativo, está abierta hacia abajo, y las coordenadas del vértice son:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

pues $b^2 - 4ac$, es el discriminante de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$