Problema núm. 249

(a) Calcula el ángulo formado por las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$r_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2} \qquad r_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{2}$$

(b) Calcula una recta r_3 perpendicular a las rectas r_1 y r_2 y exprésala en forma paramétrica.

(c) ¿Cuál es la ecuación general del plano π que contiene a r_1 y r_2?

(d) Calcula la ecuación general del plano π' que esté a distancia $\sqrt{17}$ del plano π.

Solución:

(a) $r_1 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2} \rightarrow r_1 \equiv \left(A(0,-2,1); \overrightarrow{d}_{r_1} = (1,2,2)\right)$.

$r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{2} \rightarrow r_2 \equiv \left(B(1,0,3); \overrightarrow{d}_{r_2} = (2,-3,2)\right)$.

Como, $\overrightarrow{d}_{r_1} \cdot \overrightarrow{d}_{r_2} = (1,2,2)\cdot(2,-3,2) = 0$, r_1 y r_2 son ortogonales.

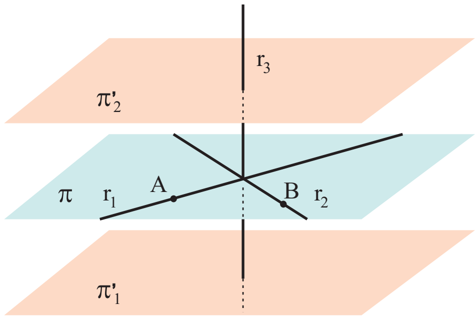
O bien de esta otra forma: $(\widehat{r_1, r_2}) = \left(\widehat{\overrightarrow{d}_{r_1}, \overrightarrow{d}_{r_2}}\right)$, y $0 \leq (\widehat{r_1, r_2}) \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{d}_{r_1}, \overrightarrow{d}_{r_2}}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{d}_{r_1}\cdot\overrightarrow{d}_{r_2}\right|}{\left|\overrightarrow{d}_{r_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{d}_{r_2}\right|} = \frac{|2-6+4|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{17}} = 0 \rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{d}_{r_1}, \overrightarrow{d}_{r_2}}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}\text{ rad.}}$$

(b) $\overrightarrow{AB} = (1,2,2)$. Y como $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{d}_{r_1}, \overrightarrow{d}_{r_2}\right) = 0$ ya que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{d}_{r_1}$ las dos rectas se cortan en un punto. Como,

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2+2\alpha \\ z = 1+2\alpha \end{cases} ; r_2 \equiv \begin{cases} x = 1+2\beta \\ y = -3\beta \\ z = 3+2\beta \end{cases} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = 1+2\beta \\ -2+2\alpha = -3\beta \\ 1+2\alpha = 3+2\beta \end{array}\right\}$$

y resolviendo se obtiene $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. El punto de corte es $(1,0,3)$.



Como la recta r_3 tiene que ser perpendicular a r_1 y a r_2 tomamos como dirección suya la del vector producto vectorial de las direcciones de ambas:

$\overrightarrow{d}_{r_3} = \overrightarrow{d}_{r_1} \times \overrightarrow{d}_{r_2} = (10,2,-7)$

con lo que $\boxed{r_3 \equiv \begin{cases} x = 1+10\mu \\ y = 2\mu \\ z = 3-7\mu \end{cases}}$

(c) $\pi \equiv \left(A(0,-2,1); \overrightarrow{d}_{r_1}, \overrightarrow{d}_{r_2}\right)$. Y su ecuación implícita es,