

Problema núm. 249

(a) Calcula el ángulo formado por las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$r_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2} \qquad r_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{2}$$

(b) Calcula una recta r_3 perpendicular a las rectas r_1 y r_2 y exprésala en forma paramétrica.

(c) ¿Cuál es la ecuación general del plano π que contiene a r_1 y r_2 ?

(d) Calcula la ecuación general del plano π' que esté a distancia $\sqrt{17}$ del plano π .

Solución:

(a) $r_1 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2} \rightarrow r_1 \equiv (A(0, -2, 1); \vec{d}_{r_1} = (1, 2, 2)).$

$r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{2} \rightarrow r_2 \equiv (B(1, 0, 3); \vec{d}_{r_2} = (2, -3, 2)).$

Como, $\vec{d}_{r_1} \cdot \vec{d}_{r_2} = (1, 2, 2) \cdot (2, -3, 2) = 0$, r_1 y r_2 son ortogonales.

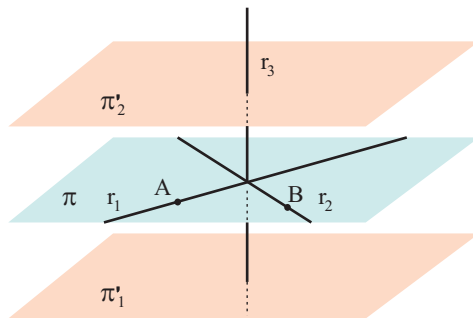
O bien de esta otra forma: $(\widehat{r_1, r_2}) = (\widehat{\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}})$, y $0 \leq (\widehat{r_1, r_2}) \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\left| \cos \left(\widehat{\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}} \right) \right| = \frac{|\vec{d}_{r_1} \cdot \vec{d}_{r_2}|}{|\vec{d}_{r_1}| \cdot |\vec{d}_{r_2}|} = \frac{|2 - 6 + 4|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{17}} = 0 \rightarrow \left(\widehat{\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}} \right) = \boxed{\frac{\pi}{2} \text{ rad.}}$$

(b) $\vec{AB} = (1, 2, 2)$. Y como $\det(\vec{AB}, \vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}) = 0$ ya que $\vec{AB} = \vec{d}_{r_1}$ las dos rectas se cortan en un punto. Como,

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = 1 + 2\alpha \end{cases}; r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\beta \\ y = -3\beta \\ z = 3 + 2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + 2\beta \\ -2 + 2\alpha = -3\beta \\ 1 + 2\alpha = 3 + 2\beta \end{cases} \text{ y resol-}$$

viendo se obtiene $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. El punto de corte es $(1, 0, 3)$.



Como la recta r_3 tiene que ser perpendicular a r_1 y a r_2 tomamos como dirección suya la del vector producto vectorial de las direcciones de ambas:

$$\vec{d}_{r_3} = \vec{d}_{r_1} \times \vec{d}_{r_2} = (10, 2, -7)$$

con lo que $r_3 \equiv \begin{cases} x = 1 + 10\mu \\ y = 2\mu \\ z = 3 - 7\mu \end{cases}$

(c) $\pi \equiv (A(0, -2, 1); \vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2})$. Y su ecuación implícita es,