7.1.3 Ejercicios resueltos

Problema núm. 1

Calcula $\int_0^4 f(x)\,dx$ siendo $f(x) = x+2$ y siguiendo los pasos indicados anteriormente.

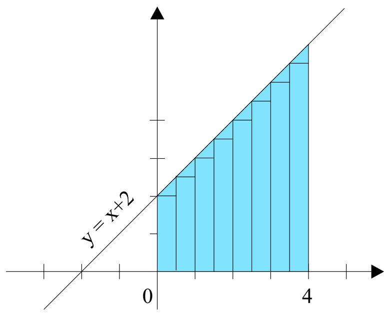
Se debe tener en cuenta que, $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$, como suma de los términos de una progresión aritmética de n sumandos y diferencia 1.

Solución:

Evidentemente el área que queremos calcular es el área del trapecio que muestra en la figura, por lo tanto:

$$\int_0^4 (x+2)\,dx = \text{ área del trapecio } =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(2+6)\cdot 4 = 16 \text{ u.s.}$$



Pretendemos ahora llegar al mismo resultado pero siguiendo las indicaciones anteriores.

Subdividimos el intervalo $[0,4]$ en n partes iguales:

$$x_0 = 0 \; < \; x_1 = \frac{4}{n} \; < \; x_2 = \frac{8}{n} \; < \; x_3 = \frac{12}{n} < \cdots < \; x_n = \frac{4n}{n} = 4$$

y tomamos los c_i iguales a los extremos derechos de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, o sea $c_i = x_i = \frac{4i}{n}$. En consecuencia:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{4i}{n} - \frac{4(i-1)}{n} = \frac{4}{n} \quad \text{y} \quad f(c_i) = c_i + 2 = \frac{4i}{n} + 2$$

con lo cual,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}+2\right)\cdot\frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{16i}{n^2}+\frac{8}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{16}{n^2}\cdot 1 + \frac{16}{n^2}\cdot 2 + \frac{16}{n^2}\cdot 3 + \cdots + \frac{16}{n^2}\cdot n\right) + \underbrace{\left(\frac{8}{n}+\frac{8}{n}+\frac{8}{n}+\cdots+\frac{8}{n}\right)}_{n \text{ veces}} =$$

$$= \frac{16}{n^2}(1+2+3\cdots+n) + \frac{8}{n}\underbrace{(1+1+1\cdots+1)}_{n \text{ veces}} = \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \; + \; \frac{8}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} 1 =$$