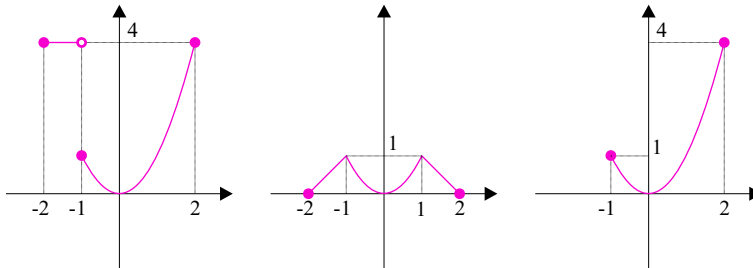


anula en  $x = 0$ . Se propone al alumno encontrar la expresión analítica de cada una de las funciones cuyas gráficas se han dibujado con anterioridad.



### Problema núm. 2

¿Es posible aplicar el teorema de Rolle a la función  $f(x) = \ln(1+x^2)$  en el intervalo  $[-1, 1]$ ? ¿Y a la función  $g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$  en el mismo intervalo?

**Solución:**

Como  $1+x^2 > 0$  para todo número real  $x$ ,  $f$  es una función continua y derivable en todo  $x \in \mathbb{R}$ , y por lo tanto es continua en  $[-1, 1]$  y derivable en  $] -1, 1[$ . Además  $f(-1) = f(1) = \ln 2$ , y en consecuencia existe un número real  $c \in ] -1, 1[$  en el que la derivada de  $f$  se anula.

Es posible deducir el valor de  $c$  a partir de la expresión de la función derivada de  $f$ . En efecto, como  $Df(c) = \frac{2c}{1+c^2} = 0$ , el valor de  $c$  que garantiza el teorema de Rolle es  $c = 0 \in ] -1, 1[$ .

La función  $g$  podemos escribirla como:

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} g \text{ es continua y derivable en } \mathbb{R} - \{0\} \text{ pues} \\ \text{en cada tramo se trata de una función} \\ \text{racional cuyo denominador no se anula.} \\ \text{Además:} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2+1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$$

con lo que queda probado que  $g$  es continua en todo  $x \in \mathbb{R}$  y por lo tanto en  $[-1, 1]$ . Y como:

$$Dg(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{se cumple que:} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} Dg(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} Dg(x) = 1 \\ \text{y } g \text{ no es derivable en } x = 0, \text{ por lo que} \\ \text{tampoco lo es en } ] -1, 1[. \end{array}$$