

De donde designando por  $S$  a  $x_1^2 + x_2^2$ , obtenemos:  $S = m^2 - 2m + 10$ . Y como,

$$DS(m) = 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

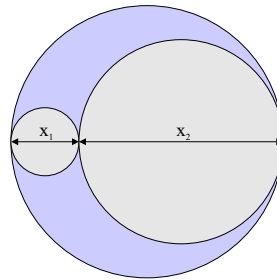
y,  $D^2S(m) = 2 > 0$  para cualquier valor de  $m$ , deducimos que el valor mínimo de  $S$  se obtiene para  $m = 1$ .

### Problema núm. 42

En una circunferencia de radio  $r$ , se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman a su vez como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a ella. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos dos diámetros para que sea máxima el área delimitada por las tres circunferencias?

#### Solución:

Designando por  $2r$ ,  $x_1$  y  $x_2$  a los diámetros de las tres circunferencias (la dada y las dos que son tangentes interiores) podemos escribir  $2r = x_1 + x_2$ , y por lo tanto, el área de la superficie delimitada por las tres es:



$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 - \left[ \pi \left( \frac{x_1}{2} \right)^2 + \pi \left( \frac{x_2}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \pi \left( r^2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \right) \end{aligned}$$

sustituyendo  $x_2 = 2r - x_1$ , expresamos  $S$  como función de  $x_1$  en la forma siguiente:

$$S(x_1) = \pi \left( r^2 - \frac{x_1^2 + (2r - x_1)^2}{4} \right) = \frac{\pi}{4} (4rx_1 - 2x_1^2)$$

y así,  $DS(x_1) = \frac{\pi}{4}(4r - 4x_1) = 0$ , si y solo si es  $x_1 = r$ . Con lo que al ser la segunda derivada  $D^2S(x_1) = -\pi < 0$ , para cualquier valor de  $x_1$ , obtenemos el máximo de  $S$  para ese valor de  $x_1 = r$ , y de aquí  $x_2 = r$ . Es decir, el área delimitada por las tres circunferencias es máxima cuando subdividimos el diámetro de la circunferencia dada en dos partes iguales.

### Problema núm. 43

Una empresa tiene que construir un depósito para que pueda contener  $10.000 \text{ m}^3$  de un determinado combustible. La forma del depósito debe ser la de un cilindro en el que se han sustituido las bases por dos semiesferas.