De donde designando por S a $x_1^2 + x_2^2$, obtenemos: $S = m^2 - 2m + 10$. Y como,

$$DS(m) = 2m - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1$$

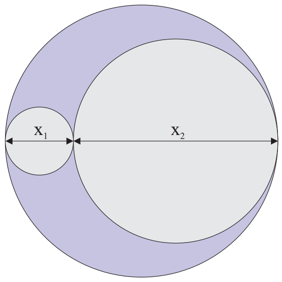
y, $D^2S(m) = 2 > 0$ para cualquier valor de m, deducimos que el valor mínimo de S se obtiene para $m = 1$.

Problema núm. 42

En una circunferencia de radio r, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman a su vez como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a ella. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos dos diámetros para que sea máxima el área delimitada por las tres circunferencias?

Solución:

Designando por $2r$, x_1 y x_2 a los diámetros de las tres circunferencias (la dada y las dos que son tangentes interiores) podemos escribir $2r = x_1 + x_2$, y por lo tanto, el área de la superficie delimitada por las tres es:



$$S = \pi r^2 - \left[\pi\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{x_2}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \pi\left(r^2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4}\right)$$

sustituyendo $x_2 = 2r - x_1$, expresamos S como función de x_1 en la forma siguiente:

$$S(x_1) = \pi\left(r^2 - \frac{x_1^2 + (2r - x_1)^2}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(4rx_1 - 2x_1^2\right)$$

y así, $DS(x_1) = \frac{\pi}{4}(4r - 4x_1) = 0$, si y solo si es $x_1 = r$. Con lo que al ser la segunda derivada $D^2S(x_1) = -\pi < 0$, para cualquier valor de x_1, obtenemos el máximo de S para ese valor de $x_1 = r$, y de aquí $x_2 = r$. Es decir, el área delimitada por las tres circunferencias es máxima cuando subdividimos el diámetro de la circunferencia dada en dos partes iguales.

Problema núm. 43

Una empresa tiene que construir un depósito para que pueda contener 10.000 m^3 de un determinado combustible. La forma del depósito debe ser la de un cilindro en el que se han sustituido las bases por dos semiesferas.