Problema núm. 43

Determina los intervalos de decrecimiento y de crecimiento, los máximos y mínimos locales (si los hubiese), intervalos de concavidad y de convexidad y puntos de inflexión (si los hubiese), para las funciones definidas de la forma:

a) $f(x) = x^2(x-1)(x+1)$; b) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

c) $f(x) = (x^2 - 5x + 7)\, e^x$; d) $f(x) = x + \operatorname{sen} 2x$

Solución:

a) $f(x) = x^2(x-1)(x+1)$, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Su primera derivada es:

$$Df : x \mapsto Df(x) = 2x(x^2-1) + 2x^3 = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2-1)$$

y se anula para $x = 0$ y para $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, con lo que su tabla de variación es:

	$x <$	$-\sqrt{2}/2$	$< x <$	0	$< x <$	$\sqrt{2}/2$	$< x$
$2x$	$-$	$-\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$\sqrt{2}$	$+$
$2x^2-1$	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$
$Df(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

en $-\sqrt{2}/2$, en 0 y en $\sqrt{2}/2$, la función es continua y cambia su sentido de variación, por lo que hay extremos locales, luego:

Int. de decrec.: $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ e Int. de crec.: $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$

Mínimos locales: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y Máximo local: $(0,0)$

Para todo $x \in \mathbb{R}$ su segunda derivada es: $D^2f(x) = 12x^2 - 2 = 2(6x^2-1)$. Con lo que $D^2f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, y el signo de la segunda derivada es:

	$x <$	$-\sqrt{6}/6$	$< x <$	$\sqrt{6}/6$	$< x$
$6x^2-1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$D^2f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	convexa	pto. infl.	cóncava	pto. infl.	convexa

en $-\sqrt{6}/6$ y en $\sqrt{6}/6$ la función es continua y derivable, y cambia de cóncava a convexa, o viceversa, luego: